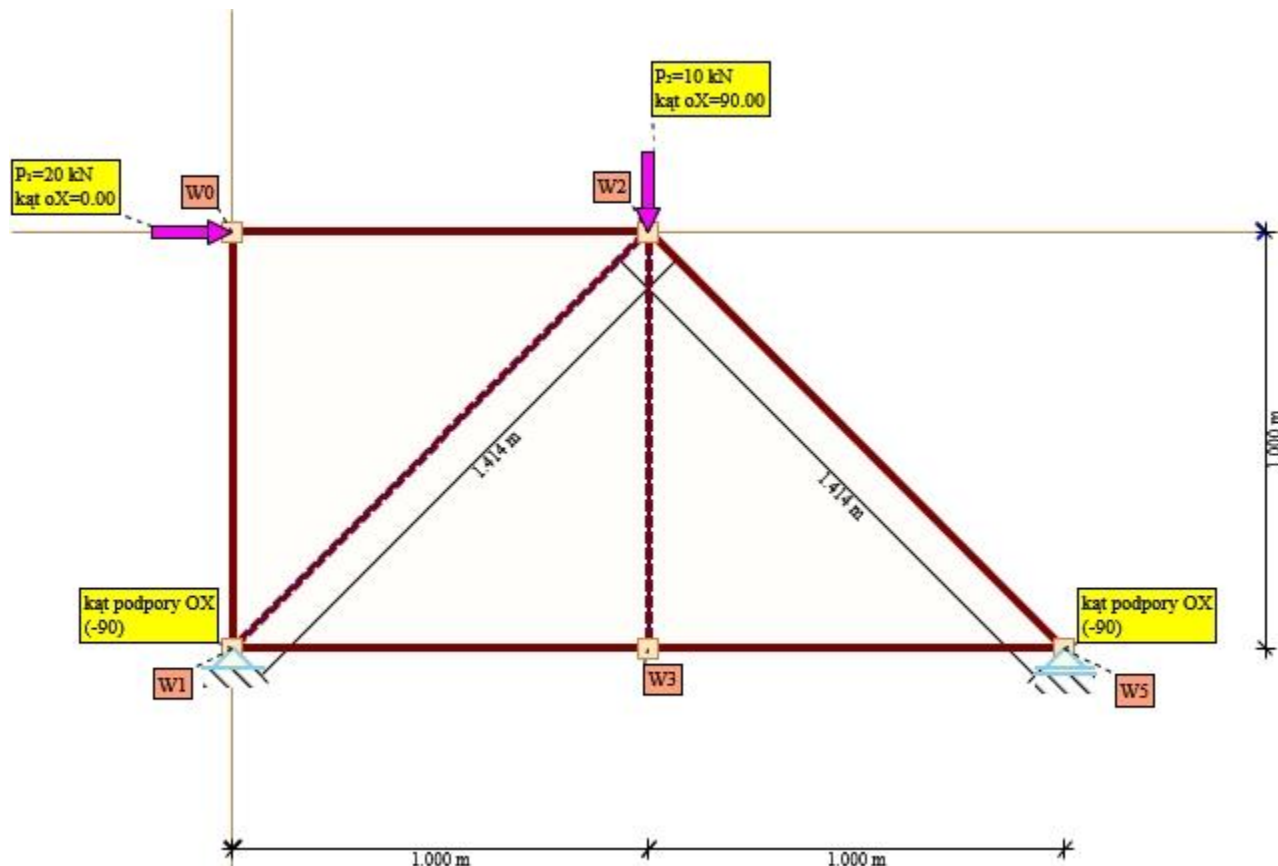




### 1. Kratownica

Dla danej kratownicy wyznaczyć siły we wszystkich prętach metodą równoważenia węzłów

### 2. Szkic projektu



### 3. Ustalenie warunku statycznej niewyznaczalności układu

Warunek konieczny geometrycznej niezmienności i statycznej wyznaczalności kratownicy o strukturze prostej:

$$p=2w-r$$

gdzie:

p= liczba prętów kratownicy

w= liczba węzłów kratownicy

r= liczba stopni swobody odbieranych przez podpory

Kratownica:

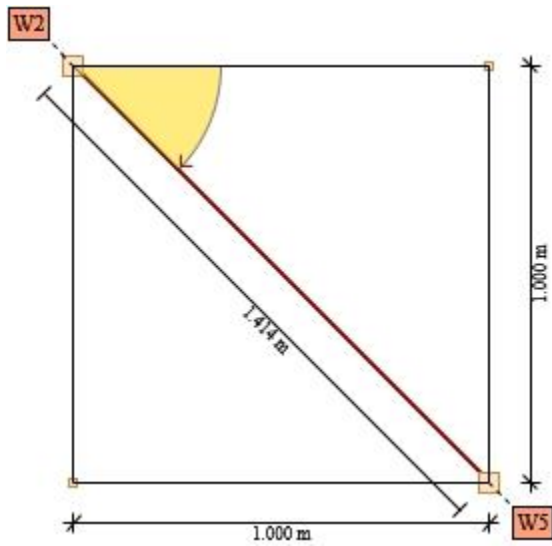
$$p = 7 \quad , \quad w = 5$$

$$2w - r = 2 \cdot 5 - 3 = 7$$

warunek:  $7=7$ , warunek jest spełniony



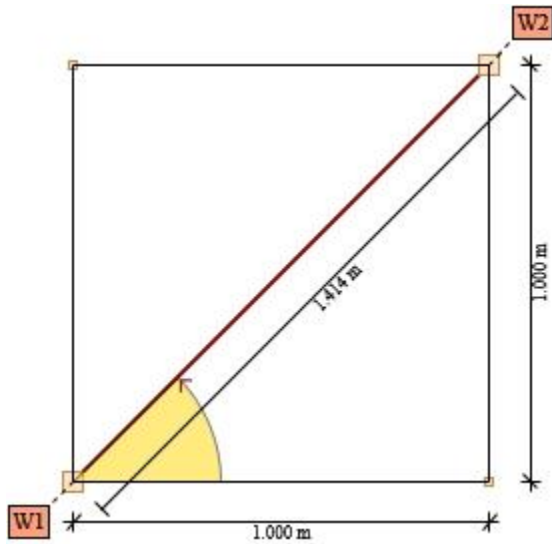
4. Obliczenie kątów nachylenia prętów do osi X wariant z sin i cos



Pręt Nr 2-5=45°

$$\sin \alpha = \frac{Y}{L} = \frac{1}{1.4142} = 0.7071$$

$$\cos \alpha = \frac{X}{L} = \frac{1}{1.4142} = 0.7071$$



Pręt Nr 1-2=(-45)°

$$\sin \alpha = \frac{Y}{L} = \frac{1}{1.4142} = 0.7071$$

$$\cos \alpha = \frac{X}{L} = \frac{1}{1.4142} = 0.7071$$



## 5. Wyznaczenie Reakcji Podporowych

siły i reakcje będziemy przyjmować za dodatnie, gdy są skierowane zgodnie z układem osi XY

siły i reakcje będziemy przyjmować za ujemne, gdy są skierowane niezgodnie z układem osi XY

siły i reakcje będziemy rzutować na oś X i oś Y wyliczając odpowiednie składowe rzutów

$$P_x = P \cdot \cos(\beta)$$

$$P_y = P \cdot \sin(\beta)$$

gdzie  $\beta$  to kąt zawarty pomiędzy siłą lub reakcją a osią X na podstawie tego kąta można określić zwrot siły lub reakcji

.....

Uwalniamy daną kratownicę od więzów i wyznaczamy reakcje podporowe.

Ogólne warunki równowagi

$$\Sigma M = 0, \Sigma X = 0, \Sigma Y = 0$$

.....

$$\Sigma M = 0$$

suma wszystkich momentów od składowych reakcji i obciążeń siłowych w punkcie, w którym Moment = 0

przyjmujemy punkt, w którym znajduje się podpora przegubowa, w tym punkcie Moment = 0

$$\Sigma M = R_{p_5} \cdot (2-0) \cdot \sin((-90)) + P_1 \cdot (1-0) \cdot \cos(0) + P_2 \cdot (1-0) \cdot \sin(90) = 0$$

$$\Sigma M = R_{p_5} \cdot 2 \cdot (-1) + 20 \cdot 1 \cdot 1 + 10 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

$$\Sigma M = R_{p_5} \cdot (-2) + 20 \cdot 1 + 10 \cdot 1 = 0$$

$$\Sigma M = R_{p_5} \cdot (-2) + 20 + 10 = 0$$

$$\Sigma M = R_{p_5} \cdot (-2) + 30 = 0$$

$$R_{p_5} = 15 \text{ kN}$$

.....

$$\Sigma X = 0$$

suma wszystkich składowych reakcji i obciążeń siłowych rzutowana na oś X

$$\Sigma X = H_1 + P_1 \cdot \cos(0) = 0$$

$$\Sigma X = H_1 + 20 \cdot 1 = 0$$

$$\Sigma X = H_1 + 20 = 0$$

$$H_1 = (-20) \text{ kN}$$

.....



$$\Sigma Y = 0$$

suma wszystkich składowych reakcji i obciążeń siłowych rzutowana na oś Y

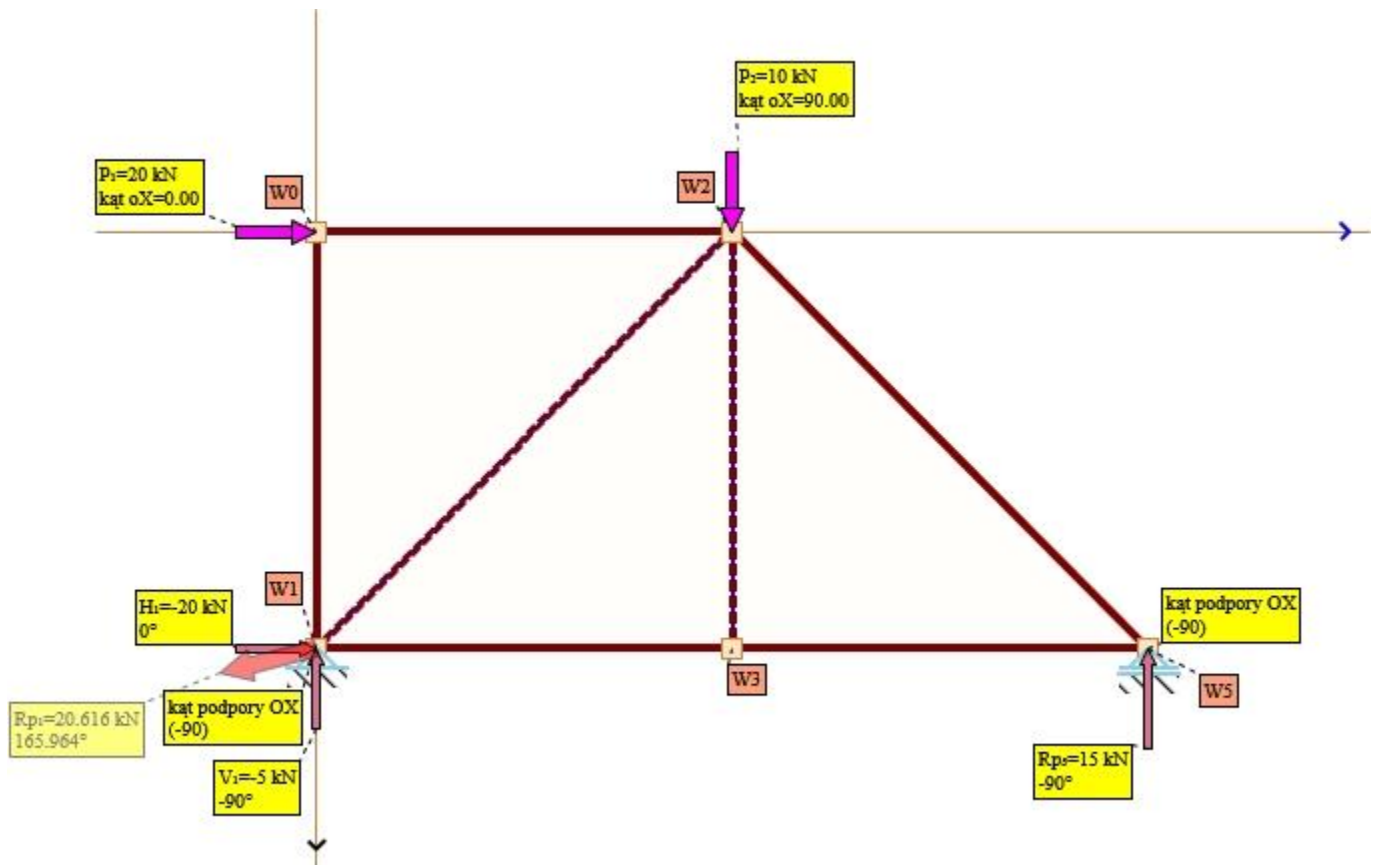
$$\Sigma Y = -V_1 + P_2 \cdot \sin(90) + R_{p5} \cdot \sin((-90)) = 0$$

$$\Sigma Y = -V_1 + 10 \cdot 1 + 15 \cdot (-1) = 0$$

$$\Sigma Y = -V_1 + 10 + (-15) = 0$$

$$V_1 = (-5) \text{ kN}$$

6. Szkic projektu



## 7. Sprawdzenie Reakcji Podporowych

Sprawdzenia poprawności wyznaczenia reakcji podporowych dokonamy w punkcie  $[(-1);(-1)]$  w naszym układzie XY

(Punkt musi być tak dobrany, aby wszystkie siły i reakcje brały udział w obliczaniu Sumy Momentów)

W punkcie tym Suma Momentów od wszystkich sił i reakcji powinna wynosić  $M=0$

$$\Sigma M = 0$$

suma wszystkich momentów od składowych reakcji i obciążeń siłowych w punkcie, w którym Moment = 0



$$\Sigma M = R p_5 \cdot (2 - (-1)) \cdot \sin((-90)) + H_1 \cdot ((-1) - 1) + V_1 \cdot (0 - (-1)) + P_1 \cdot ((-1) - 0) \cdot \cos(0) + P_2 \cdot (1 - (-1)) \cdot \sin(90) = 0$$

$$\Sigma M = 15 \cdot 3 \cdot (-1) + (-20) \cdot (-2) + 5 \cdot 1 + 20 \cdot (-1) \cdot 1 + 10 \cdot 2 \cdot 1 = 0$$

$$\Sigma M = 15 \cdot (-3) + (-20) \cdot (-2) + 5 \cdot 1 + 20 \cdot (-1) + 10 \cdot 2 = 0$$

$$\Sigma M = (-45) + 40 + 5 + (-20) + 20 = 0$$

$$\Sigma M = (0) \text{ kNm}$$

#### 8. Sprawdzenie Reakcji Podporowych Rzut X

$$\Sigma X = H_1 + P_1 \cdot \cos(0) = 0$$

$$\Sigma X = (-20) + 20 \cdot 1 = 0$$

$$\Sigma X = (-20) + 20 = 0$$

$$\Sigma X = 0 \text{ kN}$$

#### 9. Sprawdzenie Reakcji Podporowych Rzut Y

$$\Sigma Y = R p_5 \cdot \sin((-90)) + V_1 + P_2 \cdot \sin(90) = 0$$

$$\Sigma Y = 15 \cdot (-1) + 5 + 10 \cdot 1 = 0$$

$$\Sigma Y = (-15) + 5 + 10 = 0$$

$$\Sigma Y = 0 \text{ kN}$$

#### 10. Obliczenie kątów nachylenia prętów do osi X wariant z tan

$X_b - X_a$  i  $Y_b - Y_a$  to różnica pomiędzy współrzędnymi końca pręta

Pręt Nr 0-2 =  $0^\circ$

$$\arctan\left(\frac{Y_b - Y_a}{X_b - X_a}\right) = \arctan\left(\frac{0 - 0}{1 - 0}\right) = \arctan\left(\frac{0}{1}\right) = 0^\circ$$

Pręt Nr 2-3 =  $90^\circ$

$$\arctan\left(\frac{Y_b - Y_a}{X_b - X_a}\right) = \arctan\left(\frac{1 - 0}{1 - 1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{0}\right) = 90^\circ$$

Pręt Nr 1-3 =  $0^\circ$

$$\arctan\left(\frac{Y_b - Y_a}{X_b - X_a}\right) = \arctan\left(\frac{1 - 1}{1 - 0}\right) = \arctan\left(\frac{0}{1}\right) = 0^\circ$$

Pręt Nr 1-0 =  $(-90)^\circ$



$$\arctan\left(\frac{Y_b - Y_a}{X_b - X_a}\right) = \arctan\left(\frac{0-1}{0-0}\right) = \arctan\left(\frac{(-1)}{0}\right) = (-90)^\circ$$

Pręt Nr 3-5=0°

$$\arctan\left(\frac{Y_b - Y_a}{X_b - X_a}\right) = \arctan\left(\frac{1-1}{2-1}\right) = \arctan\left(\frac{0}{1}\right) = 0^\circ$$

Pręt Nr 2-5=45°

$$\arctan\left(\frac{Y_b - Y_a}{X_b - X_a}\right) = \arctan\left(\frac{1-0}{2-1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = 45^\circ$$

Pręt Nr 1-2=(-45)°

$$\arctan\left(\frac{Y_b - Y_a}{X_b - X_a}\right) = \arctan\left(\frac{0-1}{1-0}\right) = \arctan\left(\frac{(-1)}{1}\right) = (-45)^\circ$$

### 11. Obliczenie sił w Prętach

Aby Węzeł był w równowadze to suma jego składowych sił i reakcji rzutowana na oś X i oś Y musi być równa zero

$$\Sigma N_x + \Sigma R_x + \Sigma P_x = 0$$

$$\Sigma N_y + \Sigma R_y + \Sigma P_y = 0$$

$$\Sigma N_x$$

To suma sił prętowych rzutowana na oś X w Węźle.

$$\Sigma R_x$$

To suma reakcji podporowych rzutowana na oś X w Węźle - jeżeli jest istnieje.

$$\Sigma P_x$$

To suma oddziaływania zewnętrznego rzutowana na oś X w Węźle - jeżeli jest przyłożona.

$$\Sigma N_y$$

To suma sił prętowych rzutowana na oś Y w Węźle.

$$\Sigma R_y$$

To suma reakcji podporowych rzutowana na oś Y w Węźle - jeżeli jest istnieje.

$$\Sigma P_y$$

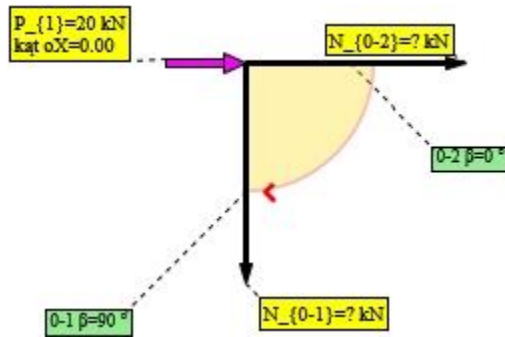
To suma oddziaływania zewnętrznego rzutowana na oś Y w Węźle - jeżeli jest przyłożona.

Obliczenia rozpoczynamy od Węźła, dla którego liczba niewiadomych sił w Prętach jest najmniejsza i wynosi maksymalnie 2

.....



Wybrano Węzeł =0



Do policzenia  $N_{0-2}$   $\beta = 0$

Do policzenia  $N_{0-1}$   $\beta = 90$

Rzutowanie na oś X

$$N_{0-2} \cdot \cos(0) + N_{0-1} \cdot \cos(90) + P_1 \cdot \cos(0) = 0$$

$$N_{0-2} \cdot 1 + N_{0-1} \cdot 0 + 20 \cdot 1 = 0$$

$$N_{0-2} \cdot 1 + 20 = 0$$

Rzutowanie na oś Y

$$N_{0-2} \cdot \sin(0) + N_{0-1} \cdot \sin(90) = 0$$

$$N_{0-2} \cdot 0 + N_{0-1} \cdot 1 = 0$$

$$N_{0-2} \cdot 0 + N_{0-1} \cdot 1 = 0$$

Układ równań

$$\begin{cases} N_{0-2} \cdot 1 + 20 = 0 \\ N_{0-2} \cdot 0 + N_{0-1} \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

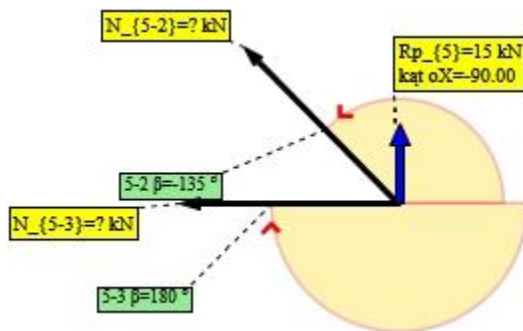
wyliczono  $N_{0-2} = (-20) \text{ kN}$

wyliczono  $N_{0-1} = 0 \text{ kN}$

.....  
.....



Wybrano Węzeł =5



Do policzenia  $N_{5-2}$   $\beta = (-135)$

Do policzenia  $N_{5-3}$   $\beta = 180$

Rzutowanie na oś X

$$N_{5-2} \cdot \cos((-135)) + N_{5-3} \cdot \cos(180) = 0$$

$$N_{5-2} \cdot (-0.7071) + N_{5-3} \cdot (-1) = 0$$

$$N_{5-2} \cdot (-0.7071) + N_{5-3} \cdot (-1) = 0$$

Rzutowanie na oś Y

$$N_{5-2} \cdot \sin((-135)) + N_{5-3} \cdot \sin(180) + R p_5 \cdot \sin((-90)) = 0$$

$$N_{5-2} \cdot (-0.7071) + N_{5-3} \cdot 0 + 15 \cdot (-1) = 0$$

$$N_{5-2} \cdot (-0.7071) + (-15) = 0$$

Układ równań

$$\begin{cases} N_{5-2} \cdot (-0.7071) + N_{5-3} \cdot (-1) = 0 \\ N_{5-2} \cdot (-0.7071) + (-15) = 0 \end{cases}$$

wyliczono  $N_{5-2} = (-21.2132)$  kN

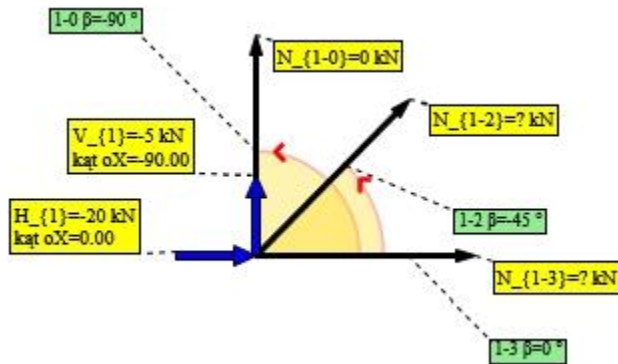
wyliczono  $N_{5-3} = 15$  kN

.....  
.....





Wybrano Węzeł =1



Do policzenia  $N_{1-2}$   $\beta = (-45)$

Do policzenia  $N_{1-3}$   $\beta = 0$

policzone  $N_{1-0} = 0$  kN  $\beta = (-90)$

Rzutowanie na oś X

$$N_{1-2} \cdot \cos((-45)) + N_{1-3} \cdot \cos(0) + H_1 = 0$$

$$N_{1-2} \cdot 0.7071 + N_{1-3} \cdot 1 + (-20) = 0$$

$$N_{1-2} \cdot 0.7071 + N_{1-3} \cdot 1 + (-20) = 0$$

Rzutowanie na oś Y

$$N_{1-2} \cdot \sin((-45)) + N_{1-3} \cdot \sin(0) + V_1 = 0$$

$$N_{1-2} \cdot (-0.7071) + N_{1-3} \cdot 0 + 5 = 0$$

$$N_{1-2} \cdot (-0.7071) + 5 = 0$$

Układ równań

$$\begin{cases} N_{1-2} \cdot 0.7071 + N_{1-3} \cdot 1 + (-20) = 0 \\ N_{1-2} \cdot (-0.7071) + 5 = 0 \end{cases}$$

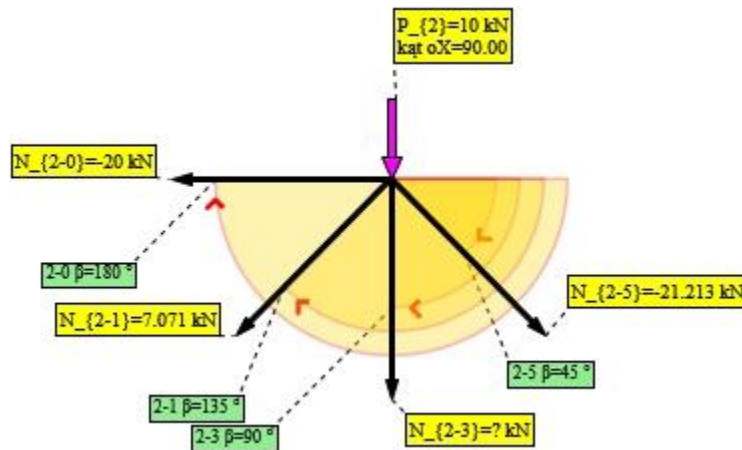
wyliczono  $N_{1-2} = 7.0711$  kN

wyliczono  $N_{1-3} = 15$  kN

.....  
.....



Wybrano Węzeł =2



Do policzenia  $N_{2-3}$   $\beta = 90$

policzone  $N_{2-0} = (-20)$  kN  $\beta = 180$

policzone  $N_{2-5} = (-21.2132)$  kN  $\beta = 45$

policzone  $N_{2-1} = 7.0711$  kN  $\beta = 135$

Rzutowanie na oś X

$$N_{2-3} \cdot \cos(90) + N_{2-0} \cdot \cos(180) + N_{2-5} \cdot \cos(45) + N_{2-1} \cdot \cos(135) = 0$$

$$N_{2-3} \cdot 0 + (-20) \cdot (-1) + (-21.2132) \cdot 0.7071 + 7.0711 \cdot (-0.7071) = 0$$

$$N_{2-3} \cdot 0 + 20 + (-15) + (-5) = 0$$

Rzutowanie na oś Y

$$N_{2-3} \cdot \sin(90) + P_{(2)} \cdot \sin(90) + N_{2-5} \cdot \sin(45) + N_{2-1} \cdot \sin(135) = 0$$

$$N_{2-3} \cdot 1 + 10 \cdot 1 + (-21.2132) \cdot 0.7071 + 7.0711 \cdot 0.7071 = 0$$

$$N_{2-3} \cdot 1 + 10 + (-15) + 5 = 0$$

równanie

$$N_{2-3} \cdot 0 + 0 = 0$$

lub równanie

$$N_{2-3} \cdot 1 + 0 = 0$$

wyliczono  $N_{2-3} = 0$  kN

---



## 12. Szkic projektu

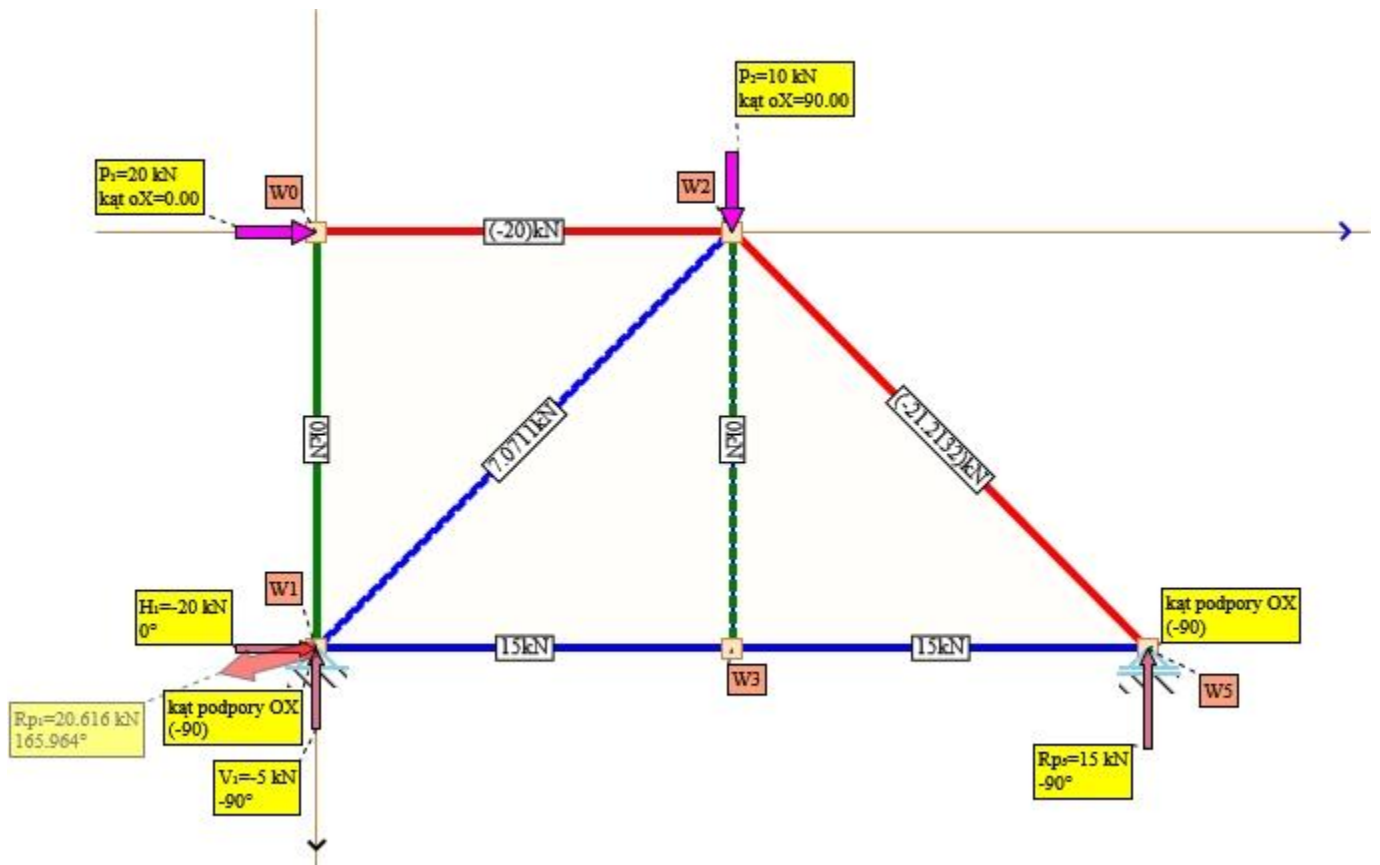


Tabela 1 Siły Prętowe

Pręt	N [kN]	kąt [°]	L [m]	funkcja
0-2	-20.0000	0.0000	1.0000	ściskany
2-3	0.0000	90.0000	1.0000	jest zerowy
1-3	15.0000	0.0000	1.0000	rozciągany
0-1	0.0000	90.0000	1.0000	jest zerowy
3-5	15.0000	0.0000	1.0000	rozciągany
2-5	-21.2132	45.0000	1.4142	ściskany
1-2	7.0711	-45.0000	1.4142	rozciągany



.....  
.....  
Wydruk wygenerowany w programie Kratos

Copyright © 2018 Grupa Rectan