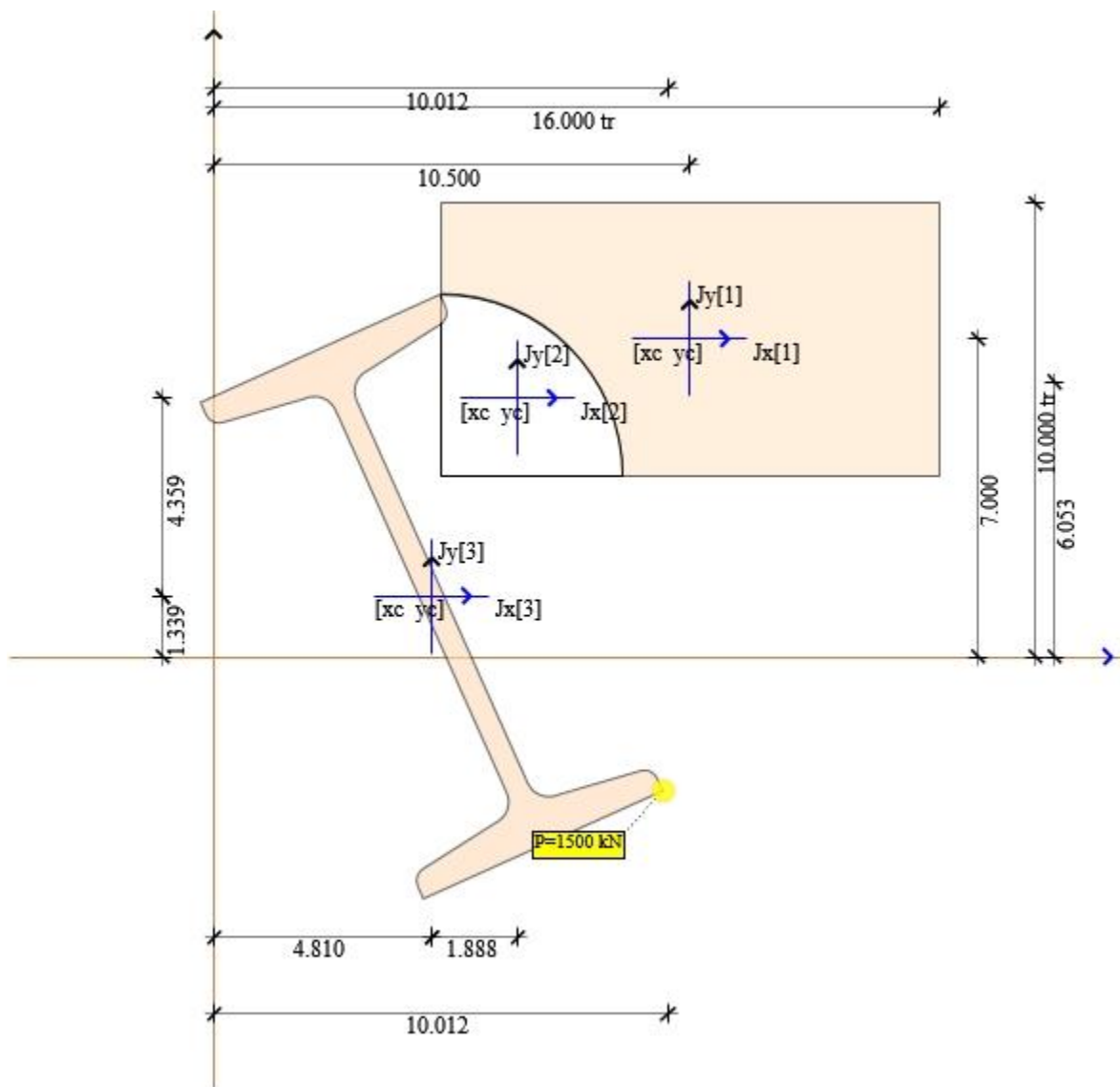




Zadanie: Wyznaczyć położenie głównych centralnych osi bezwładności i obliczyć główne centralne momenty bezwładności

### 1. Szkic projektu



\* Rozwiązanie zadania \*

Oznaczenia:

$A \text{ [cm}^2\text{]}$  - pole powierzchni figury

$X_o \text{ [cm]}$  - współrzędna X środka ciężkości figury w układzie globalnym

$Y_o \text{ [cm]}$  - współrzędna Y środka ciężkości figury w układzie globalnym

$A \cdot x \text{ [cm}^3\text{]}$  - moment statyczny względem osi Y w układzie globalnym



$A \cdot y$  [cm<sup>3</sup>] - moment statyczny względem osi X w układzie globalnym

$X_c$  [cm] - współrzędna X środka ciężkości układu figur w układzie globalnym

$Y_c$  [cm] - współrzędna Y środka ciężkości układu figur w układzie globalnym

$x_c$  [cm] - odległość X pomiędzy środkiem ciężkości figury a środkiem ciężkości układu

$y_c$  [cm] - odległość Y pomiędzy środkiem ciężkości figury a środkiem ciężkości układu

$c_y$  [cm] - odległość X pomiędzy środkiem ciężkości figury a Left

$c_x$  [cm] - odległość Y pomiędzy środkiem ciężkości figury a Top

$J_x$  [cm<sup>4</sup>] - moment bezwładności figury względem osi X

$J_y$  [cm<sup>4</sup>] - moment bezwładności figury względem osi Y

$D_{xy}$  [cm<sup>4</sup>] - dewiacyjny moment bezwładności figury

$A \cdot x \cdot x$  [cm<sup>4</sup>] - element do wzoru Steinera

$A \cdot y \cdot y$  [cm<sup>4</sup>] - element do wzoru Steinera

$A \cdot x \cdot y$  [cm<sup>4</sup>] - element do wzoru Steinera

[... tablice] lub Red Book - wartość odczytana z Tablic Inżynierskich

.....  
Transformacja Kątowa : współrzędne X i Y obliczamy ze wzorów na obrót układu:

$$X = X' \cdot \cos(\phi) - Y' \cdot \sin(\phi)$$

$$Y = X' \cdot \sin(\phi) + Y' \cdot \cos(\phi)$$

gdzie X i Y to punkt po transformacji kątowej a X' i Y' punkt przed transformacją kątową

gdzie  $\phi$  to kąt obrotu figury układ X'Y' względem układu XY - jeżeli jest on zgodny z ruchem wskazówek zegara to jest on ujemny

.....  
Transformacja Liniowa : współrzędne Xo i Yo obliczamy ze wzorów na przesunięcie układu:

gdzie dX i dY to współrzędne początku (TopLeft) figury w nowym położeniu

$$X_o = dX + X'$$

$$Y_o = dY + Y'$$

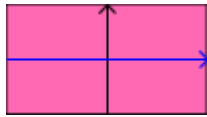
.....



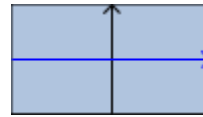
## 2. Położenie $X_c Y_c$ głównych centralnych osi bezwładności względem układu $XY$

Obliczenie nowych wartości środka ciężkości figury po obrocie o kąt i przesunięciu do punktu docelowego. Figura znajduje się teraz w takim położeniu jak wzory podane na obliczanie momentów. Układ taki nazywamy układem lokalnym figury.

### 2.1. Figura Prostokąt $b=11[cm]$ $h=6[cm]$



$$cx_o = 5.5[cm]$$
$$cy_o = 3[cm]$$



$$X_o = 10.5[cm]$$
$$Y_o = 7[cm]$$

kąt  $OX$ : 0 [stopnie]

transformacja liniowa figury do punktu docelowego o wektor  $dX$  i  $dY$

$$dX = 5[cm]$$

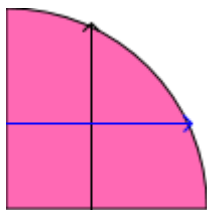
$$dY = 10[cm]$$

$$X_o = 5 + 5.5 = 10.5[cm]$$

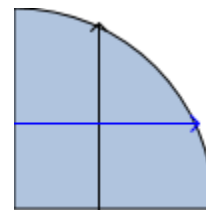
$$Y_o = 10 + (-3) = 7[cm]$$

.....

### 2.2. Figura ćwiartka koła $r=4[cm]$



$$cx_o = 1.6977[cm]$$
$$cy_o = (-1.6977)[cm]$$



$$X_o = 6.6977[cm]$$
$$Y_o = 5.6977[cm]$$

kąt  $OX$ : 0 [stopnie]

transformacja liniowa figury do punktu docelowego o wektor  $dX$  i  $dY$

$$dX = 5[cm]$$

$$dY = 4[cm]$$

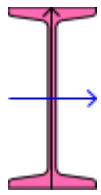
$$X_o = 5 + 1.6977 = 6.6977[cm]$$

$$Y_o = 4 + 1.6977 = 5.6977[cm]$$

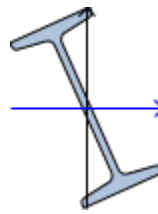
.....



## 2.3.Figura Dwuteownik 120 INP



$$cx_o = 2.9[cm]$$
$$cy_o = 6[cm]$$



$$X_o = 4.8099[cm]$$
$$Y_o = 1.3386[cm]$$

kąt OX: -24.161074 [stopnie]

Transformacja kątowna : figury w układzie lokalnym o kąt

$$\phi = -24^{\circ} 9' 39''$$

$$X' = 2.9[cm]$$

$$Y' = (-6)[cm]$$

$$X = 2.9 \cdot \cos(\phi) - (-6) \cdot \sin(\phi)$$

$$Y = 2.9 \cdot \sin(\phi) + (-6) \cdot \cos(\phi)$$

$$X = 2.9 \cdot \cos(-24.1611) - (-6) \cdot \sin(-24.1611)$$

$$Y = 2.9 \cdot \sin(-24.1611) + (-6) \cdot \cos(-24.1611)$$

$$X = 2.9 \cdot 0.9124 - (-6) \cdot 0.4093$$

$$Y = 2.9 \cdot 0.4093 + (-6) \cdot 0.9124$$

$$X = 2.646 - (-2.4558) = 5.1018[cm]$$

$$Y = 1.187 + (-5.4744) = (-4.2874)[cm]$$

.....  
transformacja liniowa figury do punktu docelowego o wektor dX i dY

$$dX = (-0.2919)[cm]$$

$$dY = 5.626[cm]$$

$$X_o = (-0.2919) + 5.1018 = 4.8099[cm]$$

$$Y_o = 5.626 + (-4.2874) = 1.3386[cm]$$
  
.....  
.....



$$\Sigma A = 67.6336 [cm^2]$$

$$\Sigma Ax = 677.1349 [cm^3]$$

$$\Sigma Ay = 409.4097 [cm^3]$$

$$X_c = \frac{\Sigma Ax}{\Sigma A} = \frac{677.1349}{67.6336} = 10.0118 [cm]$$

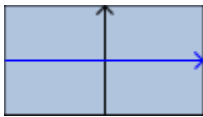
$$Y_c = \frac{\Sigma Ay}{\Sigma A} = \frac{409.4097}{67.6336} = 6.0533 [cm]$$

Tabela Środki ciężkości Figur

Fig.	Xo [cm]	Yo [cm]	A [cm <sup>2</sup> ]	A·x [cm <sup>3</sup> ]	A·y [cm <sup>3</sup> ]
1	10.500	7.000	66.000	693.000	462.000
2	6.698	5.698	-12.566	-84.165	-71.599
3	4.810	1.339	14.200	68.300	19.009
		Sumy	67.634	677.135	409.410

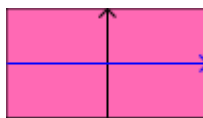
## 1. Momenty bezwładności

### 1.1.Figura Prostokąt b=11[cm] h=6[cm]



kąt OX: 0 [stopnie]

Wartości Jxo, Jyo, Dxyo w układzie XoYo bez obrotu figury



$$b = 11 [cm]$$

$$h = 6 [cm]$$

$$A = b \cdot h = 11 \cdot 6 = 66 [cm^2]$$

$$J_{x_o} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{11 \cdot 6^3}{12} = 198 [cm^4]$$

$$J_{y_o} = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{6 \cdot 11^3}{12} = 665.5 [cm^4]$$

$$D_{x_y_o} = 0 [cm^4]$$

$$c_{x_o} = 5.5 [cm]$$

$$c_{y_o} = 3 [cm]$$

#### 1.1.1. Układ nachylony nie występuje

kąt nachylenia jest równy zero względem naszego układu XY



$$Jx_o = 198 [cm^4]$$

$$Jy_o = 665.5 [cm^4]$$

$$Dxy_o = 0 [cm^4]$$

1.1.2. Ocena czy figura podana została jako ujemna

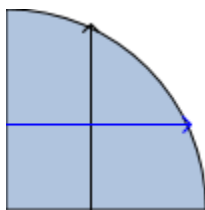
pole dodatnie: figura została podana jako dodatnia wartości:  $Jx_o$ ,  $Jy_o$ ,  $Dxy_o$  zostaną przy swoich znakach

1.1.3. Odległości od środka ciężkości figury do środka ciężkości układu

$$x = X_o - X_c = 10.5 - 10.0118 = 0.4882 [cm]$$

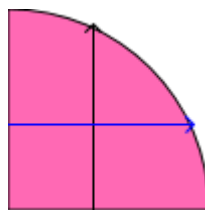
$$y = Y_o - Y_c = 7 - 6.0533 = 0.9467 [cm]$$

1.2. Figura ćwiartka koła  $r=4[cm]$



kąt OX: 0 [stopnie]

Wartości  $Jx_o$ ,  $Jy_o$ ,  $Dxy_o$  w układzie  $X_oY_o$  bez obrotu figury



$$r = 4 [cm]$$

$$r^4 = 256 [cm^4]$$

$$A = \frac{\pi}{4} \cdot r^2 = 12.5664 [cm^2]$$

$$Jx_o = r^4 \cdot \left( \frac{\pi}{16} - \frac{4}{9 \cdot \pi} \right) = 14.0489 [cm^4]$$

$$Jy_o = r^4 \cdot \left( \frac{\pi}{16} - \frac{4}{9 \cdot \pi} \right) = 14.0489 [cm^4]$$

$$Dxy_o = \frac{r^4}{8} - \frac{4r^4}{9 \cdot \pi} = (-4.2166) [cm^4]$$

$$cx_o = 1.6977 [cm]$$

$$cy_o = (-1.6977) [cm]$$

1.2.1. Układ nachylony nie występuje

kąt nachylenia jest równy zero względem naszego układu XY

$$Jx_o = (-14.0489) [cm^4]$$

$$Jy_o = (-14.0489) [cm^4]$$

$$Dxy_o = 4.2166 [cm^4]$$



## 1.2.2. Ocena czy figura podana została jako ujemna

pole ujemne: figura została podana jako ujemna wartości:  $J_{x_o}$ ,  $J_{y_o}$ ,  $D_{x_o y_o}$  zostały zmienione na przeciwne

$$J_{x_o} = (-14.0489) [cm^4]$$

$$J_{y_o} = (-14.0489) [cm^4]$$

$$D_{x_o y_o} = 4.2166 [cm^4]$$

pole ujemne: figura została podana jako ujemna wartość:  $A$  - pole powierzchni zostało zmienione na ujemne

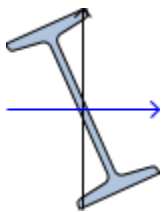
$$A = (-12.5664) [cm^2]$$

## 1.2.3. Odległości od środka ciężkości figury do środka ciężkości układu

$$x = X_o - X_c = 6.6977 - 10.0118 = (-3.3142) [cm]$$

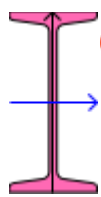
$$y = Y_o - Y_c = 5.6977 - 6.0533 = (-0.3557) [cm]$$

## 1.3. Figura Dwuteownik 120 INP



kąt  $OX$ :  $-24.161074$  [stopnie]

Wartości  $J_{x_o}$ ,  $J_{y_o}$ ,  $D_{x_o y_o}$  w układzie  $X_o Y_o$  bez obrotu figury



$s = 5.8$  [cm]  
 $h = 12$  [cm]  
 $A = 14.2$  [cm<sup>2</sup>]  
 $J_{x_o} = 328$  [cm<sup>4</sup>]  
 $J_{y_o} = 21.5$  [cm<sup>4</sup>]  
 $D_{x_o y_o} = 0$  [cm<sup>4</sup>]  
 $c_{x_o} = 2.9$  [cm]  
 $c_{y_o} = 6$  [cm]

1.3.1. Momenty i dewiacje dla układu nachylonego względem naszego układu  $XY$ 

(ponieważ kąt nachylenia analizowanej figury jest różny od zera i wynosi jak poniżej to należy obliczyć układ nachylony)

$$\alpha = -24^{\circ} 9' 39''$$

Momenty wejsciove do obliczenia układu nachylonego



$$Jx_o = 328[cm^4]$$

$$Jy_o = 21.5[cm^4]$$

$$Dxy_o = 0[cm^4]$$

1.3.2. Jx w układzie nachylonym

$$\begin{aligned} Jx_c &= \frac{Jx_o + Jy_o}{2} + \frac{Jx_o - Jy_o}{2} \cos(2\alpha) - Dxy_o \sin(2\alpha) = \\ &= \frac{328 + 21.5}{2} + \frac{328 - 21.5}{2} \cos(2(-24.1611)) - 0 \cdot \sin(2(-24.1611)) = \\ &= \frac{349.5}{2} + \frac{306.5}{2} \cos((-48.3221)) - 0 \cdot \sin((-48.3221)) = \\ &= 174.75 + 153.25 \cdot 0.6649 - 0 \cdot (-0.7469) = \\ &= 174.75 + 101.9023 - 0 = 276.6523[cm^4] \end{aligned}$$

1.3.3. Jy w układzie nachylonym

$$\begin{aligned} Jy_c &= \frac{Jx_o + Jy_o}{2} - \frac{Jx_o - Jy_o}{2} \cos(2\alpha) + Dxy_o \sin(2\alpha) = \\ &= \frac{328 + 21.5}{2} - \frac{328 - 21.5}{2} \cos(2(-24.1611)) - 0 \cdot \sin(2(-24.1611)) = \\ &= \frac{349.5}{2} - \frac{306.5}{2} \cos((-48.3221)) - 0 \cdot \sin((-48.3221)) = \\ &= 174.75 - 153.25 \cdot 0.6649 + 0 \cdot (-0.7469) = \\ &= 174.75 - 101.9023 + 0 = 72.8477[cm^4] \end{aligned}$$

1.3.4. Dxy w układzie nachylonym

$$\begin{aligned} Dxy_c &= \frac{Jx_o - Jy_o}{2} \sin(2\alpha) + Dxy_o \cos(2\alpha) = \\ &= \frac{328 - 21.5}{2} \sin(2(-24.1611)) + 0 \cdot \cos(2(-24.1611)) = \\ &= \frac{306.5}{2} \sin((-48.3221)) + 0 \cdot 0.6649 = \\ &= 153.25 \cdot (-0.7469) + 0 \cdot 0.6649 = \\ &= (-114.4617) + 0 = (-114.4617)[cm^4] \end{aligned}$$

1.3.5. Ocena czy figura podana została jako ujemna

pole dodatnie: figura została podana jako dodatnia wartości: Jxo, Jyo, Dxyo zostaną przy swoich znakach

1.3.6. Odległości od środka ciężkości figury do środka ciężkości układu

$$x = X_o - X_c = 4.8099 - 10.0118 = (-5.2019)[cm]$$

$$y = Y_o - Y_c = 1.3386 - 6.0533 = (-4.7147)[cm]$$

.....





## 2. Centralne Momenty bezwładności dla układu XcYc względem środka ciężkości Osi Centralnych

### 2.1. Sumy częściowe Jxo, Jyo, Dxoyo

zestawienie sumowania przedstawiono w tabeli Excel \*Momenty i Dewiacje\* w dalszej części projektu

$$\Sigma Jx_o = 460.6034 [cm^4]$$

$$\Sigma Jy_o = 724.2988 [cm^4]$$

$$\Sigma Dxy_o = (-110.2451) [cm^4]$$

$$\Sigma Ax^2_o = 261.9607 [cm^4]$$

$$\Sigma Ay^2_o = 373.2016 [cm^4]$$

$$\Sigma Axy_o = 363.9531 [cm^4]$$

### 3. Jxc, Jyc, Dxyc całego układu zgodnie z twierdzeniem Steinera

$$Jx_c = \Sigma Jx_o + \Sigma Ay^2_o = 460.6034 + 373.2016 = 833.8051 [cm^4]$$

$$Jy_c = \Sigma Jy_o + \Sigma Ax^2_o = 724.2988 + 261.9607 = 986.2595 [cm^4]$$

$$Dxy_c = \Sigma Dxy_o + \Sigma Axy_o = (-110.2451) + 363.9531 = 253.708 [cm^4]$$

### 3.1. Zestawienie Centralnych Jxc, Jyc, Dxyc do dalszych obliczeń

$$Jx_c = 833.8051 [cm^4]$$

$$Jy_c = 986.2595 [cm^4]$$

$$Dxy_c = 253.708 [cm^4]$$

to są Centralne Momenty Bezwładności układu figur

.....

## 4. Kąt OXc Głównych Centralnych osi bezwładności

$$\tan(2\alpha_{głowne}) = \frac{2Dxy_c}{Jy_c - Jx_c} = \frac{2 \cdot 253.708}{986.2595 - 833.8051} =$$

$$\tan(2\alpha_{głowne}) = \frac{507.4159}{152.4544} = 3.3283$$

$$2\alpha_{głowne} = \arctan(\tan(2\alpha_{głowne})) =$$

$$2\alpha_{głowne} = \arctan(3.3283) = 73.277 \text{ [stopnie]}$$

### 4.1. Kąt alfa

$$\alpha_{głowne} = \frac{2\alpha_{głowne}}{2} = 36^\circ 38' 18''$$

.....



## 5. Główne Centralne momenty bezwładności

## 5.1. Jmax

$$\begin{aligned}
 J_{max} &= \frac{J_{y_c} + J_{x_c}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{y_c} - J_{x_c}}{2}\right)^2 + Dxy_c^2} = \\
 &= \frac{986.2595 + 833.8051}{2} + \sqrt{\left(\frac{986.2595 - 833.8051}{2}\right)^2 + 253.708^2} = \\
 &= 910.0323 + \sqrt{(76.2272)^2 + 253.708^2} = \\
 &= 910.0323 + \sqrt{70178.3139} = 910.0323 + 264.9119 = \\
 J_{max} &= 1174.9442 \quad (J_I)[cm^4]
 \end{aligned}$$

## 5.2. Jmin

$$\begin{aligned}
 J_{min} &= \frac{J_{y_c} + J_{x_c}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{y_c} - J_{x_c}}{2}\right)^2 + Dxy_c^2} = \\
 &= \frac{986.2595 + 833.8051}{2} - \sqrt{\left(\frac{986.2595 - 833.8051}{2}\right)^2 + 253.708^2} = \\
 &= 910.0323 - \sqrt{(76.2272)^2 + 253.708^2} = \\
 &= 910.0323 - \sqrt{70178.3139} = 910.0323 - 264.9119 = \\
 J_{min} &= 645.1204 \quad (J_{II})[cm^4]
 \end{aligned}$$

Tabela Momenty i Dewiacje

Fig.	xc [cm]	yc [cm]	Jx [cm <sup>4</sup> ]	Jy [cm <sup>4</sup> ]	Dxy [cm <sup>4</sup> ]	A·x·x [cm <sup>4</sup> ]	A·y·y [cm <sup>4</sup> ]	A·x·y [cm <sup>4</sup> ]
1	0.488	0.947	198.000	665.500	0.000	15.730	59.146	30.502
2	-3.314	-0.356	-14.049	-14.049	4.217	-138.024	-1.590	-14.814
3	-5.202	-4.715	276.652	72.848	-114.462	384.255	315.645	348.265
		Sumy	460.603	724.299	-110.245	261.961	373.202	363.953

## 6. Sprawdzenie

## 6.1. Niezmiennik J1

$$\delta J_1 = (J_{y_c} + J_{x_c}) - (J_{max} + J_{min}) = 0$$

$$(J_{y_c} + J_{x_c}) = 986.2595 + 833.8051 = 1820.0645$$

$$(J_{max} + J_{min}) = 1174.9442 + 645.1204 = 1820.0645$$



$$\delta J_1 = 1820.0645 - 1820.0645 = 0$$

6.2. Niezmiennik  $J_2$

$$\delta J_2 = (J y_c \cdot J x_c - D x y_c^2) - (J_{max} \cdot J_{min}) = 0$$

$$(J y_c \cdot J x_c - D x y_c^2) = 986.2595 \cdot 833.8051 - 253.708^2 = 757980.4168$$

$$(J_{max} \cdot J_{min}) = 1174.9442 \cdot 645.1204 = 757980.4168$$

$$\delta J_2 = 757980.41681640374 - 757980.41681640351 = 2.3283064365386963 E - 10$$

$$\delta \% = 3.0717237343912191 E - 14 \cdot \%$$

.....

7. Momenty bezwładności dla naszego układu XY w punkcie [0,0]

$$J x_{[0;0]} = J x_c + A \cdot y_c^2 = 833.8051 + 2478.2986 = 3312.1037 [cm^4]$$

$$J y_{[0;0]} = J y_c + A \cdot x_c^2 = 986.2595 + 6779.3442 = 7765.6037 [cm^4]$$

$$D x y_{[0;0]} = D x y_c + A \cdot x_c \cdot y_c = 253.708 + 67.6336 \cdot 10.0118 \cdot 6.0533 =$$

$$D x y_{[0;0]} = 253.708 + (-4098.9315) = (-3845.2235) [cm^4]$$

8. Wskaźniki  $W_x$ ,  $W_y$

maxX -maksymalna odległość punktu układu od osi Xcentralnej

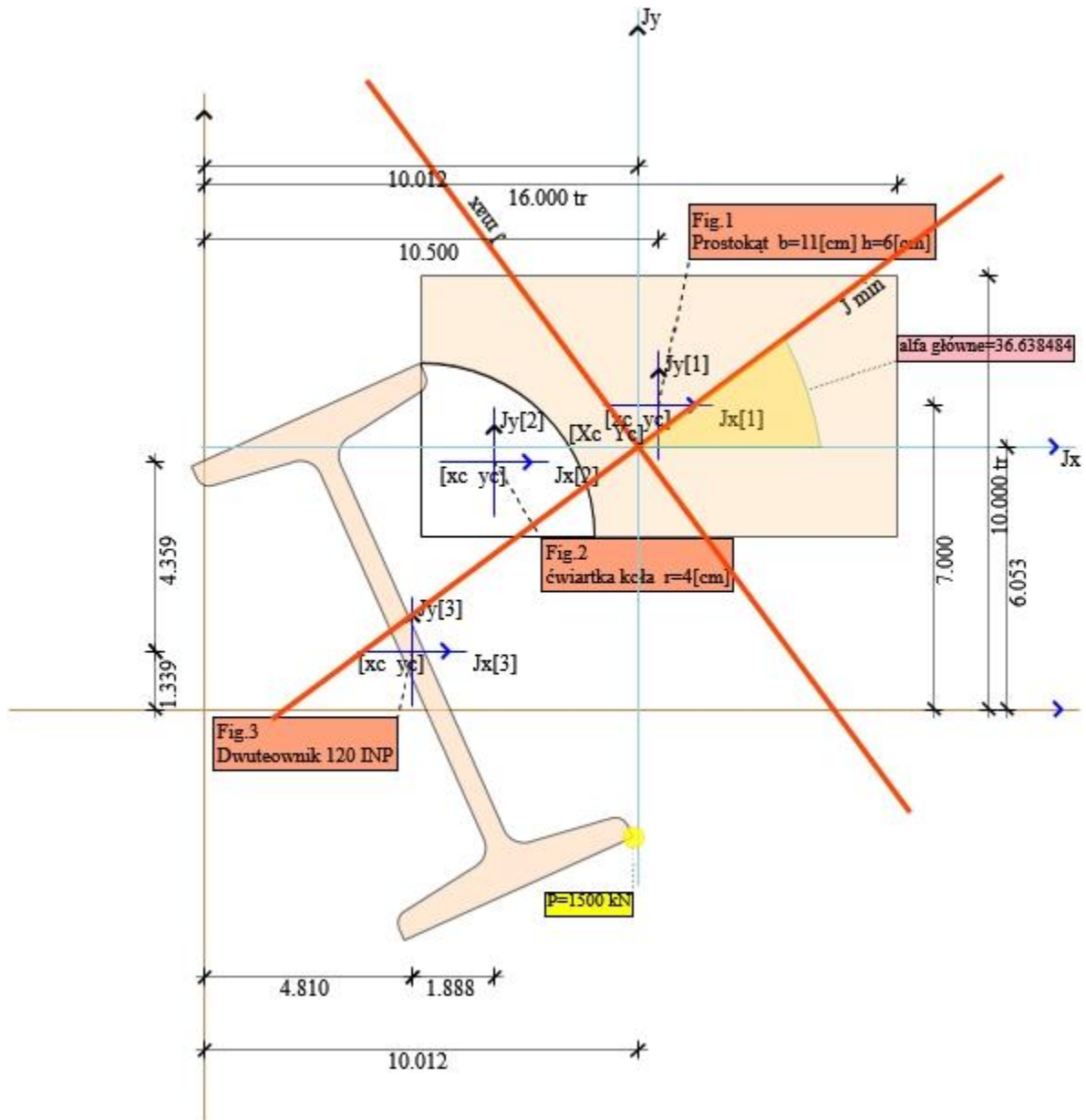
maxY -maksymalna odległość punktu układu od osi Ycentralnej

$$W_x = \frac{J_x}{maxX} = \frac{833.8050}{3.9466} = 211.2688 cm^3$$

$$W_y = \frac{J_y}{maxY} = \frac{986.2594}{5.9881} = 164.7007 cm^3$$



9. Szkic projektu



Wydruk wygenerowany w programie Rectan

Copyright © 2018 Grupa Rectan